《数值分析》家庭作业

李铁军

北京大学数学学院

日期：2026 年 3 月 2 日

Lecture 1

1. 用下列迭代法计算 $\sqrt{7}$，

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{7}{x_k}\right), k = 0, 1, 2 \cdots \end{cases}$$

证明：若 x_k 是 $\sqrt{7}$ 的具有 n 位有效数字的近似值，则 x_{k+1} 必是 $\sqrt{7}$ 的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

2. 试改变下列表达式使计算结果比较精确:

(1) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}, \qquad |x| \ll 1,$

(2) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{x-\dfrac{1}{x}}, \qquad x \gg 1,$

(3) $\dfrac{1-\cos x}{x}, \qquad x \neq 0,\ |x| \ll 1.$

3. 一个浮点数系可用四元数组 (β, t, L, U) 来刻划.

(1) 若 $\beta = 10$，欲使数 2365.27 和 0.0000512 能够准确地用规范化的浮点数来表出，最小的 t 和 U，及最大的 L 各是多少?

(2) 若在上题中去掉“规范化的”的要求，答案将发生什么样的变化?

4. (编写简单程序计算) 对于积分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

(1) 证明递推关系

$$\begin{cases} I_n = -5I_{n-1} + \dfrac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \\ I_0 = \ln(1.2) \end{cases}$$

(2) 用上述递推关系计算 $I_1, I_2, \cdots, I_{20}$, 观察数值结果是否合理并说明原因.

Lecture 2

1. 证明下面等式:
$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x) \equiv 1,\ \ \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k,\ \ 0 \le k \le n.$$
2. 设 $M_n = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)|$，证明对 Lagrange 插值多项式 $\Pi_n(x)$ 有
$$|f^{(k)}(x) - \Pi_n^{(k)}(x)| \le \frac{1}{(n+1-k)!} M_{n+1}(b-a)^{n+1-k},$$
其中 $k = 0, 1, \ldots, n$, $x \in [a, b]$.
3. 设 $f(x) \in C^4[a, b]$, 求三次多项式 $p(x)$，使之满足插值条件
$$\begin{cases} p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \\ p'(x_1) = f'(x_1), \end{cases}$$
其中 $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$. 并给出用 p 逼近 f 的截断误差表达式.
4. (编写简单程序计算) 取 Chebyshev 点组 $x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n+2}\pi)$, $k = 0, 1, \cdots, n$, 考察针对 Runge 函数的插值, 并与均匀插值节点情形进行比较.

Lecture 3

1. 证明：$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 是 $f_0, f_1, \cdots, f_k$ 的线性组合，进一步有
$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} f(x_j)/w'_{k+1}(x_j).$$
2. 定义向前差分算子 $\nabla^+ f(x) = f(x+h) - f(x)$, $(\nabla^+)^2 f = \nabla^+(\nabla^+ f)$, 证明
$$(\nabla^+)^k f = k! h^k f[x_0, \cdots, x_k],$$
其中 $x_j = x + jh, j = 0, 1, \cdots$. 对向后差分 $\nabla^- f(x) = f(x) - f(x-h)$ 有类似结论.
3. 对两点三次 Hermite 插值用基函数表述：
$$H(x) = y_0^{(0)} h_0^0(x) + y_0^{(1)} h_0^1(x) + y_1^{(0)} h_1^0(x) + y_1^{(1)} h_1^1(x),$$
其中
$$\begin{cases} h_i^0(x_j) = \delta_{ij}, \quad (h_i^0)'(x_j) = 0 \\ h_i^1(x_j) = 0, \quad (h_i^1)'(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \qquad i, j = 0, 1.$$
写出 $h_i^j(x), i, j = 0, 1$.
4. 定义 $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)$, 对分片线性插值基函数 $\{l_j(x)\}$，计算
$$(\text{刚度矩阵}) \quad S = (S_{ij})_{i,j=0}^k, \quad S_{ij} = (l'_i, l'_j)$$
和
$$(\text{质量矩阵}) \quad M = (M_{ij})_{i,j=0}^k, \quad M_{ij} = (l_i, l_j).$$

Lecture 4

1. (1) 讨论二次样条的存在唯一性（严格证明）；

   (2) 讨论高次样条的可能性.

2. 对于三次样条函数 $S(x)$，如果给定的插值条件是：

   $$S'(x_i) = y_i', \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

   如何给出边界条件使得 $S(x)$ 被唯一确定?

3. 验证在结点 $\{x_i\}_i$ 上定义的规范化 B 样条基函数 $B_{i,k}(x)$:

   $$B_{i,k}(x) = \frac{x_{i+k+1} - x_i}{k+1} M_{k+1}[x_i, \ldots, x_{i+k+1}; x], \quad k \geq 0$$

   满足下面 Cox-de Boor 递推式

   $$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

   $$B_{i,k}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x),\ k = 1, 2, \ldots$$

   及归一化性质

   $$\sum_{i=J-k}^{J} B_{i,k}(x) = 1, \quad x_J \leq x < x_{J+1}; \quad \sum_{i=-k}^{n-1} B_{i,k}(x) = 1,\ x_0 \leq x < x_n.$$

Lecture 5

1. 证明 Legendre 多项式
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$
满足递推式:
$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x).$$

2. 证明下述多项式为正交多项式，并推导其递推式.

   (1) Chebyshev 多项式: $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $[a,b] = [-1,1]$,
$$P_n(x) = \cos(n(\cos^{-1} x)), \quad |x| \le 1.$$
   (2) Laguerre 多项式: $w(x) = e^{-x}$, $[a,b] = [0,+\infty)$,
$$P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$
   (3) Hermite 多项式: $w(x) = e^{-x^2}$, $[a,b] = (-\infty,+\infty)$,
$$P_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Lecture 6

1. 证明：$T_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义：

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n\cos^{-1}x), & |x| \le 1 \\ \frac{1}{2}[(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n], & |x| \ge 1 \end{cases}$$

由复扩张 $\cos z = \cosh iz$, 也有

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n\cos^{-1}x), & |x| \le 1 \\ \cosh(n\cosh^{-1}x), & x \ge 1 \\ (-1)^n\cosh(n\cosh^{-1}(-x)), & x \le -1 \end{cases}$$

2. 记函数 $f \in C[a,b]$ 在 P_k 中的最佳一致逼近多项式为 $U_k(f)$.

(1) 求 $U_0(f)$;

(2) 设 $f \in C^2[a,b]$, $f''(x) > 0$, 求 $U_1(f)$;

(3) $U_k(f+g)$ 是否等于 $U_k(f) + U_k(g)$?

Lecture 7

1. 考察等距节点 $x_k = x_0 + kh\ (k = 0, 1, \dots, n), h > 0$.
   (a) 假设 $f \in C^n[x_0, x_n]$, 证明 Newton 差商
   $$f[x_0, x_1, \dots, x_n] \sim O(1), \quad 当 h \ll 1.$$
   (b) 假设 f 在 $[x_0, x_n]$ 上为右连续的分片光滑函数，且存在唯一的第一类间断点 $x^* \in (x_0, x_n)$, 证明 Newton 差商
   $$f[x_0, x_1, \dots, x_n] \sim O(h^{-n}), \quad 当 h \ll 1.$$

Lecture 8

1. 证明复合 Cotes 公式 C_n 与复合 Simpson 公式 S_n 满足关系
$$C_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1}.$$
2. 阿基米德通过计算直径为 1 的圆的内接和外切正多边形的周长来近似 π. 这些值分别提供了 π 值的下界和上界.

   (1) 给出直径为 1 的圆的内接正 n 边形的周长 p_n 和外切正 n 边形的周长 q_n 的公式.

   (2) 证明 p_n 和 q_n 可以分别表示成如下形式:
$$p_n = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots$$
   和
$$q_n = b_0 + b_1 h^2 + b_2 h^4 + \cdots,$$
   其中 $h = 1/n$. a_0 和 b_0 的具体值是多少?

   (3) 若算出 $p_6 = 3.0000, p_{12} = 1058$，试使用 Richardson 外推公式给出一个对 π 的更好的近似. 类似地，若给定 $q_6 = 3.4641, q_{12} = 3.2154$, 使用 Richardson 外推公式给出一个对 π 的更好的近似.

   (4) 如采用 Richardson 外推法，估计为达到祖冲之计算密率的精度要计算多少边形的周长?

Lecture 9

1. 假设区间 $[a,b]$ 内 $n+1$ 个点 $\{x_k, k=0,1,\dots,n\}$ 彼此不相等，$x\in[a,b]$，f 充分光滑. 证明等式
$$\frac{d}{dx}f[x_0,\cdots,x_n,x]=f[x_0,\cdots,x_n,x,x].$$
2. 应用 Simpson 公式来推导关于在矩形 $a\le x\le b, c\le y\le d$ 上的二重积分
$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$
的求积公式，并写出余项.
3. 令 $p(x)\in P_n$，满足
$$\int_a^b p(x)x^k=0,\quad k=0,1,\dots,n-1.$$
(1) 证明 $p(x)$ 在开区间 (a,b) 中有 n 个实单根.

(2) 证明：区间 $[a,b]$ 上的 n 点积分公式，若以 $p(x)=0$ 的根为节点，代数精度可以达到 $2n-1$ 阶.
4. 设 $a\le x_0<\cdots<x_n\le b$ 是区间 $[a,b]$ 上的任意划分，证明：存在唯一的 $r_0,r_1,\dots,r_n$，使得
$$\sum_{k=0}^{n} r_k p(x_k)=\int_a^b p(x)dx$$
对所有 $p(x)\in P_n$ 都成立.

Lecture 10

1. $B_n(x)$ 为 Bernoulli 多项式，证明:

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x), \quad x \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, \cdots$$

2. 定义 B_n 从 [0,1] 到 $\mathbb{R}$ 的周期扩张 $\tilde{B}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \tilde{B}_n(x) = B_n(x), & x \in [0,1] \\ \tilde{B}_n(x+1) = \tilde{B}_n(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

证明对 $n \geq 2$, $\tilde{B}_n(x)$ 有 Fourier 级数展开式:

$$\tilde{B}_{2m}(x) = 2(-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^{2m}},$$

$$\tilde{B}_{2m+1}(x) = 2(-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{(2\pi k)^{2m+1}}.$$

Lecture 11

1. 基于一阶导数的中心差商近似公式
$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h))$$
构造一个对于二阶导数 $\partial^2 u(x,y)/\partial x \partial y$ 的近似，并分析这一逼近的误差阶.
2. 针对下图 (单位圆在第一象限的部分) 所示，基于函数 $u(x,y)$ 在 $u_0 = u(P_0)$, $u_1 = u(P_1)$, $u_2 = u(P_2)$ 的值近似 $\partial u/\partial x|_{P_1}$，并给出误差估计.

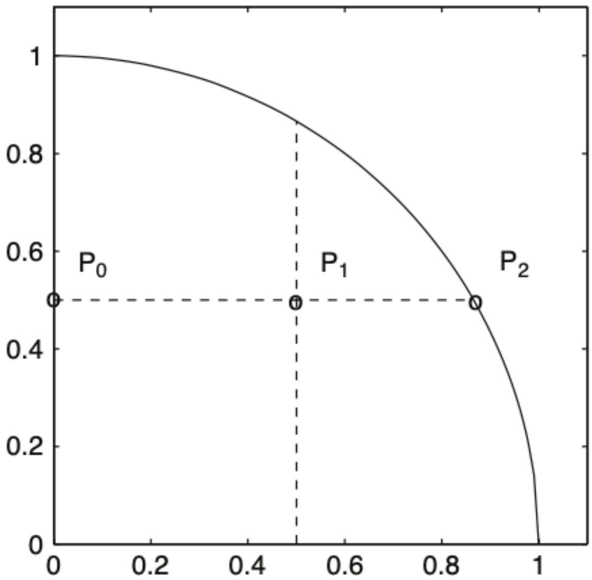

图 1: P_0,P_1,P_2 在第一象限处的位置

Lecture 12

1. 通过下述积分数值测试 Monte Carlo 方法的半阶收敛性:
$$I(f)=\int_0^1 \sin x dx=\mathbb{E}\sin X,$$
其中 $X\sim\mathcal{U}[0,1]$.
2. 假设 $X\sim\mathcal{U}[0,1]$, 且 $f(x)$ 是单调的, 证明
$$\mathrm{Cov}(f(X),f(1-X))\le 0.$$
并由此构造 Monte Carlo 方法的方差减小技术.
3. 假设 $X\sim\mathcal{U}(\mathbb{S}^2)$, 即二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上的一致分布. 你能给出 X 的几种抽样方法? 上机实现并作比较其有效性.

Lecture 13

1. 证明 Glauber 动力学取接受概率
$$A(\sigma \to \sigma') = \frac{1}{1 + \exp(-\beta(H(\sigma) - H(\sigma')))}$$
满足细致平衡条件.

2. 请设计一个 Metropolis 算法计算
$$\frac{\int_{-10}^{10} e^{-x^2/a} dx}{\int_{-10}^{10} e^{-x^2/b} dx},$$
其中 a, b 是正的常数. 编程测试你的算法, 取 $a = 10, b = 12$.

Lecture 14

1. 证明由 $G(x) = \ln(1+e^x)$ 定义的函数 $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，在任何闭区间 $[a,b]$ 上是压缩的，但是没有不动点.
2. 设 $f(x)$ 充分光滑，x^* 是 $f(x)$ 的 m 重根，$m \geq 2$.
   (a) 证明此时牛顿迭代法是一阶局部收敛的.
   (b) 记 $g(x) = f(x)/f'(x)$, 证明对 $g(x)$ 的牛顿法至少是二阶局部收敛于 x^*.
   (c) 如果事先知道根的重数 m，则迭代法
   $$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$
   至少具有二阶局部收敛性.
3. 使用牛顿法求解标量非线性方程 $f(x) = 0$ 时要求在每一步计算 f 的导数，假如用常数 d 代替真实的导数值，可以得到下面的迭代式：
   $$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/d,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$
   (a) 当 d 满足怎样的条件时，上面格式是局部收敛的?
   (b) 一般情况下，上面格式的收敛速度如何?
   (c) 是否存在某个常数 d 使得上面迭代格式仍是二阶局部收敛的?

Lecture 15

1. 证明 Sherman-Morrison 公式:

   设向量 $v, w \in \mathbb{R}^n$, A 可逆. 如 $w^T A^{-1} v \neq -1$, 则 $A + vw^T$ 可逆, 且
   $$(A + vw^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}v \cdot w^T A^{-1}}{1 + w^T A^{-1} v}.$$

Lecture 16

1. 设 f, g 为 2π 周期的分片光滑函数, 定义
$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
及卷积
$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy.$$
证明以下等式
(1) $\widehat{(f')}_k = ik\hat{f}_k$, $f \in C^1_{2\pi}$.
(2) $(f\widehat{(x-a)})_k = e^{-ika}\hat{f}_k$.
(3) $\widehat{(f*g)}_k = 2\pi\hat{f}_k\hat{g}_k$.
2. 设向量 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})^T$ 的离散 Fourier 变换为 $\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})^T$, 其中 a_k, c_k 对下标为周期 N 的. 对于 $n = 0, 1, \ldots, N-1$ 分别定义向量 $\boldsymbol{b}^{(n)}$，其分量为
$$b_k^{(n)} = a_k \cos(2\pi kn/N),\ (k = 0, 1, \ldots, N-1).$$
定义向量 $\boldsymbol{d}^{(n)}$ 的分量为
$$d_k^{(n)} = c_{k+n} + c_{k-n},\ (k = 0, 1, \ldots, N-1).$$
证明 $\hat{\boldsymbol{b}}^{(n)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^{(n)}$.
3. 设向量 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})^T$，$\hat{\hat{\boldsymbol{a}}}$ 表示对 $\boldsymbol{a}$ 作用两次 DFT. 定义向量 $\boldsymbol{b}$ 的分量 $b_k = a_{-k} = a_{N-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$. 证明 $\hat{\hat{\boldsymbol{a}}} = N\boldsymbol{b}$.
4. 设向量 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})^T$. 定义向量 $\boldsymbol{b}$ 的分量
$$b_k = \hat{a}_{k+1} - \hat{a}_k,\ (k = 0, 1, \ldots, N-1; \hat{a}_N := \hat{a}_0).$$
定义向量 $\boldsymbol{c}$ 的分量
$$c_k = a_k(\omega_N^k - 1),\ (k = 0, 1, \ldots, N-1),$$
其中 $\omega_N = \exp(-2\pi i/N)$ 为 N 次基本单位根. 证明 $\boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{c}}$.

Lecture 17

1. 定义离散正弦变换 (DST)
$$F_k=\sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right),\quad k=1,\cdots,N-1,$$
证明其逆变换形式为
$$f_j=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_k \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right),\quad j=1,\cdots,N-1.$$
2. 定义离散余弦变换 (DCT)
$$F_k=\frac{1}{2}(f_0+(-1)^k f_N)+\sum_{j=1}^{N-1} f_j \cos\left(\frac{jk\pi}{N}\right),\quad k=0,1,\cdots,N,$$
证明其逆变换形式为
$$f_j=\frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}(F_0+(-1)^j F_N)+\sum_{k=1}^{N-1} F_k \cos\left(\frac{jk\pi}{N}\right)\right),\quad j=0,1,\cdots,N.$$
3. 定义离散半波余弦变换 (Discrete Quarter-Wave Cosine Transform)
$$F_k=\sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left(\frac{\pi k(j+\frac{1}{2})}{N}\right),\quad k=0,1,\cdots,N-1,$$
证明其逆变换形式为
$$f_j=\frac{2}{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\right)' F_k \cos\left(\frac{\pi k(j+\frac{1}{2})}{N}\right),\quad j=0,1,\cdots,N-1.$$
其中求和号后的 $'$ 表示 $k=0$ 的项前有系数 $\frac{1}{2}$.
4. 通过离散余弦变换 (DCT) 推导矩阵
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$
的特征分解形式.

Lecture 18

1. 阅读下面文献

   X. Wan, G.E. Karniadakis, A sharp error estimate for the fast Gauss transform, J. Comp. Phys. 219 (2006), 7-12.

   中关于 Theorem 1 的证明. （本次没有手写作业.）

Lecture 19

1. 分析下述预估-校正格式 (Heun 方法)
$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})), \end{cases}$$
的局部截断误差 $\tau(h) = O(h^p)$，p 为多少?
2. 证明梯形公式
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big).$$
的局部截断误差为 $\tau(h) = O(h^3)$.
3. 确定下列隐式单步法的阶：
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\Big(4f(t_n, y_n) + 2f(t_{n+1}, y_{n+1}) + h\frac{d}{dt}(f(t, y(t)))|_{(t,y)=(t_n,y_n)}\Big).$$
4. 考察非等距的时间步长 $h_n := t_{n+1} - t_n > 0, t_n \in [0, T]$. 假设迭代误差满足递推关系
$$|e_{n+1}| \le (1 + Lh_n)|e_n| + Ch_n^{p+1},\ \ n = 0, 1, \ldots, N-1$$
证明在 $|e_0| \sim O(h^p)$ 时，仍然有离散 Gronwall 型不等式误差估计 $|e_n| \sim O(h^p)$. 这里 $h := \max_{k=0:N-1} h_k$ 为分划的尺度.

Lecture 20

1. 如 x_i 为特征多项式
$$\rho(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 = 0$$
的 m 重根. 令 $y_n = n^{j-1}x_i^n\,(j=1,\cdots,m)$，证明 y_n 满足递推式
$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = 0.$$
2. 设计程序绘出梯形公式的绝对稳定域.
3. 设计程序绘出放大因子
$$R(z) = \left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| \quad \text{和} \quad \left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right|$$
对应的绝对稳定域.
4. 给定二步方法
$$y_{n+2} - (1+\alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = \frac{h}{12}\Big((5+\alpha)f_{n+2} + 8(1-\alpha)f_{n+1} - (1+5\alpha)f_n\Big),$$
其中 $-1 \le \alpha < 1$. 试求方法的绝对稳定域.

Lecture 21

1. 证明对于任意参数 α，下列 Runge-Kutta 格式是二阶的:
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_2 + k_3) \\ k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + \alpha h, y_n + \alpha k_1), \\ k_3 = f(t_n + (1-\alpha)h, y_n + (1-\alpha)k_2). \end{cases}$$
2. 对具有 Butcher 表 $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 的 s 级 Runge-Kutta 方法，证明其放大因子为:
$$R(z) = 1 + z\boldsymbol{b}^T(I - zA)^{-1} \cdot \mathbf{1} = \frac{\det(I - zA + z\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{b}^T)}{\det(I - zA)}.$$

Lecture 22

1. 设 $R(z)$ 为一有理函数 (即关于 z 的两个多项式之比). 证明 $R(z)$ 在 Re$(z) < 0$ 区域满足 $|R(z)| < 1$ 当且仅当 $R(z)$ 在 Re$(z) < 0$ 区域解析，且在虚轴 Re$(z) = 0$ 上满足 $|R(z)| \leq 1$.

Lecture 23

1. 对辛 Euler 格式
$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - h\nabla_q H(p_{n+1}, q_n), \\ q_{n+1} = q_n + h\nabla_p H(p_{n+1}, q_n). \end{cases}$$
证明其为辛格式，且精度仅为 1 阶.
2. 对辛中点 Euler 公式
$$z_{n+1} = z_n + hJ_{2n}^{-1}\nabla_z H\Big(\frac{z_n + z_{n+1}}{2}\Big).$$
证明上述格式为辛格式，且具有 2 阶精度.
3. 对于 Hamilton 量 $H(z) = \frac{1}{2}z^T Sz$, $S^T = S$ 对应的 Hamilton 系统
$$\frac{dz}{dt} = Bz = J_{2n}^{-1}Sz,$$
证明其加权格式
$$z_{n+1} = z_n + hB(\alpha z_{n+1} + (1-\alpha)z_n)$$
当且仅当 $\alpha = 1/2$ 时才是辛格式.